



Schulinterner Lehrplan

Mathematik

(Stand: 13.08.2021)

Inhalt

	Seite
1 Die Fachgruppe Mathematik am EvT	3
2 Entscheidungen zum Unterricht	4
2.1 Unterrichtsvorhaben	4
2.1.1 <i>Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben</i>	5
2.1.2 <i>Konkretisierte Unterrichtsvorhaben</i>	19
2.2 Grundsätze der fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit	80
2.3 Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung	82
2.4 Lehr- und Lernmittel	84
3 Entscheidungen zu fach- und unterrichtsübergreifenden Fragen	84
4 Qualitätssicherung und Evaluation	85

1 Die Fachgruppe Mathematik am EvT

Das Elisabeth-von-Thüringen-Gymnasium (kurz EvT) ist ein Gymnasium im Kölner Stadtteil Sülz. Es liegt in der Nikolausstraße unmittelbar neben dem Schiller-Gymnasium, mit dem es sich einige Einrichtungen und Kurse teilt. Der Stadtteil Sülz ist ein bevölkerungstechnisch eher durchmischtes Viertel, woraus sich eine heterogene Schülerschaft ergibt. Derzeit hat das Gymnasium als drei- bis vierzügige Schule rund 840 Schülerinnen und Schüler und insgesamt 80 Lehrer. Seit 2010 ist das Gymnasium als Schule im offenen Ganztage organisiert; mit Beginn des Schuljahres 2012/13 begann der Ausbau des gebundenen Ganztags.

Den im Schulprogramm ausgewiesenen Zielen, Schülerinnen und Schüler ihren Begabungen und Neigungen entsprechend individuell zu fördern und ihnen Orientierung für ihren weiteren Lebensweg zu bieten, fühlt sich die Fachgruppe Mathematik in besonderer Weise verpflichtet:

Durch ein fachliches Förderprogramm unter Einbeziehung des Programms „Schüler helfen Schülern“ begleitet durch regelmäßige Sprechstunden der Lehrkräfte und dort getroffene Lernvereinbarungen, werden Schülerinnen und Schüler mit Übergangs- und Lernschwierigkeiten intensiv unterstützt.

Schülerinnen und Schüler aller Klassen- und Jahrgangsstufen werden zur Teilnahme an Wettbewerben im Fach Mathematik angehalten und begleitet.

Für den Fachunterricht aller Stufen besteht Konsens darüber, dass – wo immer möglich – mathematische Fachinhalte mit Lebensweltbezug vermittelt werden. Für die Sekundarstufe I gibt es dazu verbindliche Absprachen mit anderen Fachgruppen, wie z. B. der Fachgruppe für Informatik. Besonders eng ist die Zusammenarbeit mit der Fachgruppe Physik, was deshalb leicht fällt, da viele Kolleginnen und Kollegen der Fachschaft Mathematik und Physik unterrichten.

In der Sekundarstufe II kann verlässlich darauf aufgebaut werden, dass die Verwendung von Kontexten im Mathematikunterricht bekannt ist.

In der Sekundarstufe I wird der grafikfähige Taschenrechner ab Klasse 7 verwendet, dynamische Geometrie-Software und Tabellenkalkulation werden an geeigneten Stellen im Unterricht genutzt, der Umgang mit ihnen eingeübt. Dazu stehen in der Schule zwei PC-Unterrichtsräume und ein Selbstlernzentrum zur Verfügung. In der Sekundarstufe II kann deshalb davon ausgegangen werden, dass die Schülerinnen und Schüler mit den grundlegenden Möglichkeiten dieser digitalen Werkzeuge vertraut sind.

Die Mathematikfachschaft besteht zurzeit aus 13 Kolleginnen und Kollegen, unter anderem mit den zweiten Fächern Physik, Chemie, Informatik und Erdkunde. Vor allem in den Fächern Physik und Informatik ergibt sich eine enge fächerübergreifende Zusammenarbeit.

Fachvorsitzende: Frau Bisterfeld
Stellvertreter: Frau Conti

2 Entscheidungen zum Unterricht

2.1 Unterrichtsvorhaben

Die Darstellung der Unterrichtsvorhaben im schulinternen Lehrplan besitzt den Anspruch, sämtliche im Kernlehrplan angeführten Kompetenzen abzudecken. Dies entspricht der Verpflichtung jeder Lehrkraft, Schülerinnen und Schülern Lerngelegenheiten zu ermöglichen, so dass alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans von ihnen erfüllt werden können.

Die entsprechende Umsetzung erfolgt auf zwei Ebenen: der Übersichts- und der Konkretisierungsebene.

Im „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben“ (Kapitel 2.1.1) wird die Verteilung der Unterrichtsvorhaben dargestellt. Sie ist laut Beschluss der Fachkonferenz vom 23.10.2014 verbindlich für die Unterrichtsvorhaben I, II und III der Einführungsphase. Die Unterrichtsphasen der Qualifikationsphase werden in der kommenden Fachkonferenz beschlossen. Die zeitliche Abfolge der Unterrichtsvorhaben IV bis VIII der Einführungsphase ist jeweils auf die Vorgaben zur Vergleichsklausur abzustimmen.

Das Übersichtsraster dient dazu, den Kolleginnen und Kollegen einen schnellen Überblick über die Zuordnung der Unterrichtsvorhaben zu den einzelnen Jahrgangsstufen sowie den im Kernlehrplan genannten Kompetenzen, Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten zu verschaffen. Um Klarheit für die Lehrkräfte herzustellen und die Übersichtlichkeit zu gewährleisten, werden in der Kategorie „Kompetenzen“ an dieser Stelle nur die übergeordneten Kompetenzerwartungen ausgewiesen, während die konkretisierten Kompetenzerwartungen erst auf der Ebene konkretisierter Unterrichtsvorhaben Berücksichtigung finden. Der ausgewiesene Zeitbedarf versteht sich als grobe Orientierungsgröße, die nach Bedarf über- oder unterschritten werden kann. Um Spielraum für Vertiefungen, individuelle Förderung, besondere Schülerinteressen oder aktuelle Themen zu erhalten, wurden im Rahmen dieses schulinternen Lehrplans ca. 75 Prozent der Bruttounterrichtszeit verplant.

Während der Fachkonferenzbeschluss zum „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben“ zur Gewährleistung vergleichbarer Standards sowie zur Absicherung von Kurswechslern und Lehrkraftwechseln für alle Mitglieder der Fachkonferenz *Bindkraft* entfalten soll, besitzt die Ausweisung „konkretisierter Unterrichtsvorhaben“ (Kapitel 2.1.2) *empfehlenden Charakter*. Referendarinnen und Referendaren sowie neuen Kolleginnen und Kollegen dienen diese vor allem zur standardbezogenen Orientierung in der neuen Schule, aber auch zur Verdeutlichung von unterrichtsbezogenen fachgruppeninternen Absprachen zu didaktisch-methodischen Zugängen, fächerübergreifenden Kooperationen, Lernmitteln und -orten sowie vorgesehenen Leistungsüberprüfungen, die im Einzelnen auch den Kapiteln 2.2 bis 2.4 zu entnehmen sind. Begründete Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bezüglich der konkretisierten Unterrichtsvorhaben sind im Rahmen der pädagogischen Freiheit der Lehrkräfte jederzeit mög-

lich. Sicherzustellen bleibt allerdings auch hier, dass im Rahmen der Umsetzung der Unterrichtsvorhaben insgesamt alle prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen des Kernlehrplans Berücksichtigung finden. Dies ist durch entsprechende Kommunikation innerhalb der Fachkonferenz zu gewährleisten.

2.1.1 Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben (EF)

Quelle:

<http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe/mathematik/hinweise-und-beispiele/schulinterner-lehrplan/schulinterner-lehrplan.html>

Einführungsphase	
<p><u>Unterrichtsvorhaben I (E-A1):</u></p> <p>Thema: <i>Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext (E-A1). NEU: Wiederholung quadratischer und linearer Funktionen</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Werkzeuge nutzen (GTR) <p>Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Grundlegende Eigenschaften von Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen; NEU: Vertiefung Quadratische Funktionen • Einführung ganzrationaler Funktionen <p>Zeitbedarf: 20 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben II (E-A2):</u></p> <p>Thema: <i>Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A2)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Argumentieren • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Grundverständnis des Ableitungsbegriffs • Graphisches Differenzieren <p>Zeitbedarf: 12 Std.</p>

<p><u>Unterrichtsvorhaben III (E-A3):</u></p> <p>Thema: <i>Von der h-Methode zu den Ableitungsregeln (E-A3)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Problemlösen • Argumentieren • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen <p>Zeitbedarf: 12 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben IV (E-S1):</u></p> <p>Thema: <i>Den Zufall im Griff – Modellierung von Zufallsprozessen (E-S1)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Werkzeuge nutzen und/oder Kommunizieren <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Mehrstufige Zufallsexperimente • Erwartungswert <p>Zeitbedarf: 9 Std.</p>
--	--

Einführungsphase Fortsetzung	
<p><u>Unterrichtsvorhaben V:</u></p> <p>Thema: <i>Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten (E-S2)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Kommunizieren <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Bedingte Wahrscheinlichkeiten • Stochastische Unabhängigkeit <p>Zeitbedarf: 9 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben VI:</u></p> <p>Thema: <i>Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A4)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Problemlösen • Argumentieren <p>Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen <p>Zeitbedarf: 12 Std.</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben VII:</u></p> <p>Thema: <i>Unterwegs in 3D – Koordinatisierungen des Raumes (E-G1)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Kommunizieren <p>Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Koordinatisierungen des Raumes <p>Zeitbedarf: 6 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben VIII:</u></p> <p>Thema: <i>Vektoren bringen Bewegung in den Raum (E-G2)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Problemlösen <p>Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Vektoren und Vektoroperationen <p>Zeitbedarf: 9 Std.</p>
Summe Einführungsphase: 84 Stunden	

Qualifikationsphase (Q1) – GRUNDKURS	
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-I:</u></p> <p>Thema: <i>Optimierungsprobleme (Q-GK-A1)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Problemlösen <p>Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Funktionen als mathematische Modelle <p>Zeitbedarf: 9 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-II:</u></p> <p>Thema: <i>Funktionen beschreiben Formen – Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (Q-GK-A2)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfelder: Funktionen und Analysis (A) Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Funktionen als mathematische Modelle • Lineare Gleichungssysteme <p>Zeitbedarf: 15 Std.</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-III:</u></p> <p>Thema: <i>Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden (Q-GK-G1)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Geraden) <p>Zeitbedarf: 9 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-IV:</u></p> <p>Thema: <i>Lineare Algebra als Schlüssel zur Lösung von geometrischen Problemen (Q-GK-G2)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Problemlösen • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Ebenen) • Lineare Gleichungssysteme <p>Zeitbedarf: 9 Std.</p>

Qualifikationsphase (Q1) – GRUNDKURS (Fortsetzung)	
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-V:</u></p> <p>Thema: <i>Eine Sache der Logik und der Begriffe: Untersuchung von Lagebeziehungen (Q-GK-G3)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Argumentieren • Kommunizieren <p>Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lagebeziehungen <p>Zeitbedarf: 6 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-VI:</u></p> <p>Thema: <i>Räume vermessen – mit dem Skalarprodukt Polygone und Polyeder untersuchen (Q-GK-G4)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Problemlösen <p>Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Skalarprodukt <p>Zeitbedarf: 9 Std</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-VII:</u></p> <p>Thema: <i>Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-GK-A3)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Kommunizieren <p>Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Grundverständnis des Integralbegriffs <p>Zeitbedarf: 9 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-VIII:</u></p> <p>Thema: <i>Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-GK-A4)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Argumentieren • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Integralrechnung <p>Zeitbedarf: 12 Std.</p>
Summe Qualifikationsphase (Q1) – GRUNDKURS 78 Stunden	

Qualifikationsphase (Q2) – GRUNKURS	
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-I:</u></p> <p>Thema: Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-GK-S1)</p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen <p>Zeitbedarf: 6 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-II:</u></p> <p>Thema: Treffer oder nicht? – Bernoulliexperimente und Binomialverteilung (Q-GK-S2)</p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Binomialverteilung <p>Zeitbedarf: 9 Std.</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-III:</u></p> <p>Thema: Modellieren mit Binomialverteilungen (Q-GK-S3)</p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Argumentieren <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Binomialverteilung <p>Zeitbedarf: 9 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-IV:</u></p> <p>Thema: Von Übergängen und Prozessen (Q-GK-S4)</p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Argumentieren <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Stochastische Prozesse <p>Zeitbedarf: 9 Std.</p>

Qualifikationsphase (Q2) – GRUNDKURS Fortsetzung	
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-V:</u></p> <p>Thema: <i>Natürlich: Exponentialfunktionen (Q-GK-A5)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Problemlösen • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Fortführung der Differentialrechnung <p>Zeitbedarf: 9 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-VI:</u></p> <p>Thema: <i>Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-GK-A6)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren <p>Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Fortführung der Differentialrechnung • Integralrechnung <p>Zeitbedarf: 12 Std.</p>
Summe Qualifikationsphase (Q2) – GRUNDKURS: 54 Stunden	

Qualifikationsphase (Q1) – LEISTUNGSKURS	
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-I:</u></p> <p>Thema: <i>Optimierungsprobleme (Q-LK-A1)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Problemlösen <p>Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Funktionen als mathematische Modelle • Fortführung der Differentialrechnung <p>Zeitbedarf: 20 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-II:</u></p> <p>Thema: <i>Funktionen beschreiben Formen – Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (Q-LK-A2)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfelder: Funktionen und Analysis (A) Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Funktionen als mathematische Modelle • Lineare Gleichungssysteme <p>Zeitbedarf: 20 Std.</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-III</u></p> <p>Thema: <i>Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-LK-A3)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Kommunizieren <p>Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Grundverständnis des Integralbegriffs <p>Zeitbedarf: 10 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-IV:</u></p> <p>Thema: <i>Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-LK-A4)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Argumentieren • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Integralrechnung <p>Zeitbedarf: 20 Std.</p>

Qualifikationsphase (Q1) – LEISTUNGSKURS Fortsetzung	
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-V:</u></p> <p>Thema: <i>Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden (Q-LK-G1)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Geraden) <p>Zeitbedarf: 10 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-VI:</u></p> <p>Thema: <i>Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (Q-LK-G2)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Problemlösen <p>Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Skalarprodukt <p>Zeitbedarf: 10Std.</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-VII:</u></p> <p>Thema: <i>Ebenen als Lösungsmengen von linearen Gleichungen und ihre Beschreibung durch Parameter (Q-LK-G3)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Argumentieren • Kommunizieren <p>Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Ebenen) <p>Zeitbedarf: 10 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-VIII:</u></p> <p>Thema: <i>Lagebeziehungen und Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten (Q-LK-G4)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Argumentieren • Kommunizieren <p>Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lagebeziehungen und Abstände (von Geraden) <p>Zeitbedarf: 10 Std.</p>

Qualifikationsphase (Q1) – LEISTUNGSKURS Fortsetzung	
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-IX:</u></p> <p>Thema: <i>Untersuchungen an Polyedern (Q-LK-G5)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Problemlösen • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lagebeziehung und Abstände (von Ebenen) • Lineare Gleichungssysteme <p>Zeitbedarf: 10 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-X:</u></p> <p>Thema: <i>Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen und Beweisaufgaben (Q-LK-G6)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Problemlösen <p>Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Verknüpfung aller Kompetenzen <p>Zeitbedarf: 10 Std.</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-XI:</u></p> <p>Thema: <i>Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-LK-S1)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen <p>Zeitbedarf: 5 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-XII:</u></p> <p>Thema: <i>Treffer oder nicht? – Bernoulliexperimente und Binomialverteilungen (Q-LK-S2)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Binomialverteilung <p>Zeitbedarf: 10 Std.</p>

Qualifikationsphase (Q1) – LEISTUNGSKURS Fortsetzung	
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-XIII:</u></p> <p>Thema: <i>Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (Q-LK-S3)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Problemlösen <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Binomialverteilung <p>Zeitbedarf: 5 Std</p>	
Summe Qualifikationsphase (Q1) – LEISTUNGSKURS 130 Stunden	

Qualifikationsphase (Q2) – LEISTUNGSKURS	
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-I:</u></p> <p>Thema: <i>Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen (Q-LK-S5)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Kommunizieren <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Testen von Hypothesen <p>Zeitbedarf: 10 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-II:</u></p> <p>Thema: <i>Natürlich: Exponentialfunktionen und Logarithmus (Q-LK-A5)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Problemlösen • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Fortführung der Differentialrechnung <p>Zeitbedarf: 20 Std.</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-III:</u></p> <p>Thema: <i>Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-LK-A6)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren <p>Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Fortführung der Differentialrechnung • Integralrechnung <p>Zeitbedarf: 20 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-IV:</u></p> <p>Thema: <i>Ist die Glocke normal? (Q-LK-S4)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Problemlösen • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Normalverteilung <p>Zeitbedarf: 10 Std.</p>

Qualifikationsphase (Q2) – LEISTUNGSKURS Fortsetzung	
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-V:</u></p> <p>Thema: <i>Von Übergängen und Prozessen (Q-LK-S6)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Argumentieren <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Stochastische Prozesse <p>Zeitbedarf: 10 Std.</p>	
Summe Qualifikationsphase (Q2) – LEISTUNGSKURS: 70 Stunden	

Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

E-Phase		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	E-A1	20
II	E-A2	12
III	E-A3	12
IV	E-S1	9
V	E-S2	9
VI	E-A4	12
VII	E-G1	6
VIII	E-G2	9
	Summe:	89
Q1 Grundkurse		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-GK-A1	9
II	Q-GK-A2	15
III	Q-GK-G1	9
IV	Q-GK-G2	9
V	Q-GK-G3	6
VI	Q-GK-G4	9
VII	Q-GK-A3	9
VIII	Q-GK-A4	12
	Summe:	78
Q2 Grundkurse		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-GK-S1	6
II	Q-GK-S2	9
III	Q-GK-S3	9
IV	Q-GK-S4	9
V	Q-GK-A5	9
VI	Q-GK-A6	12
	Summe:	54

Q1 Leistungskurse		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-LK-A1	20
II	Q-LK-A2	20
III	Q-LK-A3	10
IV	Q-LK-A4	20
V	Q-LK-G1	10
VI	Q-LK-G2	10
VII	Q-LK-G3	10
VIII	Q-LK-G4	10
IX	Q-LK-G5	10
X	Q-LK-G6	10
XI	Q-LK-S1	5
XII	Q-LK-S2	10
XII	Q-LK-S3	5
	Summe:	130
Q2 Leistungskurse		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-LK-S4	10
II	Q-LK-A5	20
III	Q-LK-A6	20
IV	Q-LK-S5	10
V	Q-LK-S6	10
	Summe:	70

2.1.2 Konkretisierte Unterrichtsvorhaben (EF)

Vorhabenbezogene Konkretisierung:

Siehe nächste Seite!

Einführungsphase Funktionen und Analysis (A)

Thema: Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext (E-A1)	
Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
<p>Inhaltsbezogene Kompetenzen: <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • beschreiben die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationalen Funktionen sowie quadratischen und kubischen Wurzelfunktionen (Symmetrie anhand des Exponentenkriterium, Verhalten nahe Null und im Unendlichen, Monotonie); beschreiben trigonometrische Funktionen (Periodizität) • beschreiben Wachstumsprozesse mithilfe linearer Funktionen und Exponentialfunktionen • wenden einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf Funktionen (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktion) an und deuten die zugehörigen Parameter <p>Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte): Modellieren <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (<i>Strukturieren</i>) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (<i>Mathematisieren</i>) <p>Werkzeuge nutzen <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <p>nutzen grafikfähige Taschenrechner zum</p> <ul style="list-style-type: none"> - grafischen Darstellen von Funktionen - zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen 	<p>In die erste Sequenz wird eine kurze Wiederholungsphase eingebaut: Funktionsbegriff, quadratische Funktionen, Lösen quadratischer Gleichungen. Vorschlag: <i>Wiederholungsmaterial von Herrn Weis</i> Algebraische Rechentechniken werden außerdem durch differenzierende, individuelle Zusatzangebote aus Aufgabensammlungen geübt. Vorschlag zu trigonometrische Funktionen: <i>Sequenz von Herrn Weis (Ebbe und Flut)</i></p> <p>Dem oft erhöhten Angleichungs- und Förderbedarf von Schulformwechslern wird durch individuelle Angebote Rechnung getragen (<i>unter anderem durch Vertiefungskurse</i>)</p> <p>Hinweis: <i>Zum Thema Sinus-Funktionen findet sich in dem neu eingeführten Lehrbuch von Bigalke/Köhler ausreichend Material.</i></p> <p>Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die <i>Einführung in die elementaren Bedienkompetenzen des GTR</i> gerichtet werden.</p> <p>Der Zugang zu den Potenzfunktionen und Wurzelfunktionen kann mit dem GTR erfolgen. Für die Einführung der Exponentialfunktionen werden verschiedene Kontexte (Bakterienwachstum, radioaktiver Zerfall, Abkühlung) untersucht. Anknüpfend an die Erfahrungen aus der Sek I werden quadratische Funktionen (Scheitelpunktform) und Parabeln unter dem Transformationsaspekt betrachtet (→Wiederholungssequenz).</p>

Thema: Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A2)	
Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
<p>Inhaltsbezogene Kompetenzen: <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • berechnen durchschnittliche und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Kontext • erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen (alternativ: anschaulichen) Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate • deuten die Tangente als Grenzlage einer Folge von Sekanten • deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate/ Tangentensteigung • beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion) und leiten Funktionen <i>graphisch</i> ab • begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen <p>Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):</p> <p>Argumentieren (Vermuten) <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • stellen Vermutungen auf • unterstützen Vermutungen beispielgebunden • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur <p>Werkzeuge nutzen <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • verwenden den GTR zum grafischen Darstellen von Funktionen, grafischen Messen von Steigungen • nutzen den GTR und andere digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen 	<p>Für den Einstieg werden durchschnittliche Änderungsraten in unterschiedlichen Sachzusammenhängen betrachtet, z. B. Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, Temperaturmessung, Aktienkurse, Entwicklung regenerativer Energien, Heizölpreis, Wirk- oder Schadstoffkonzentration, Wachstum, Kosten- und Ertragsentwicklung. Hinweis: <i>Unter learnline gibt es dazu ein passendes Stationenlernen.</i></p> <p>Als Kontext für den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate kann die vermeintliche Diskrepanz zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer längeren Fahrt und der durch ein Messgerät ermittelten Momentangeschwindigkeit genutzt werden.</p> <p>Zur numerischen und geometrischen Darstellung des Grenzprozesses beim Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekanten zur Tangenten (Zoomen) können verschiedene digitale Werkzeuge (Software) eingesetzt werden.</p> <p>Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schülerinnen und Schüler zum Vermuten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden. Hier ist auch der Ort, den Begriff des Extrempunktes (<i>lokal vs. global</i>) zu präzisieren und auch Sonderfälle, wie eine konstante Funktion, zu betrachten. Hinweis: Die Untersuchung der Änderung von Änderungen ist erst zu einem späteren Zeitpunkt des Unterrichts (Q1) vorgesehen.</p>

Thema: <i>Von der h-Methode zu den Ableitungsregeln (E-A3)</i>	
Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
<p>Inhaltsbezogene Kompetenzen: <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> bestimmen die Ableitungsfunktion mit Hilfe des Differenzenquotienten und der h-Methode (für einfache quadratische Funktionen) bestimmen die Ableitungsfunktion von quadratischen Funktionen und einfachen Funktionen 3. Grades nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten und wenden die Summen- und Faktorregel auf ganzrationale Funktionen an <p>Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte): Problemlösen <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> analysieren und strukturieren die Problemsituation und erkennen Muster und Beziehungen (<i>Erkunden</i>) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus (<i>Lösen</i>) <p>Argumentieren <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (<i>Vermuten</i>) nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (<i>Begründen</i>) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (<i>Beurteilen</i>) <p>Werkzeuge nutzen <i>Die Schülerinnen und Schüler</i> verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum Lösen von Gleichungen und Variieren der Parameter von Funktionen.</p>	<p>Für eine quadratische Funktion wird der Grenzübergang mit der „h-Methode“ exemplarisch durchgeführt. Empfehlung: Durch Variation vermuten die Lernenden eine Formel für die Ableitung einer beliebigen quadratischen Funktion. Dabei vermuten sie auch das Grundprinzip der Linearität (ggf. auch des Verhaltens bei Verschiebungen in x-Richtung). Durch Analyse des Rechenweges werden die Vermutungen erhärtet.</p> <p>Um die Ableitungsregel für höhere Potenzen zu vermuten, nutzen die Schüler den GTR. Eine Beweisidee kann optional erarbeitet werden.</p> <p>Durch gleichzeitiges Visualisieren der Ableitungsfunktion erklären Lernende die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen 3. Grades durch die Eigenschaften der ihnen vertrauten quadratischen Funktionen. Zugleich entdecken sie die Zusammenhänge zwischen charakteristischen Punkten. Daran wird in Unterrichtsvorhaben VI (Thema E-A4) angeknüpft.</p> <p><i>Ganzrationale Funktionen vom Grad 3 werden Gegenstand einer Erkundung, wobei Parameter gezielt variiert werden. Zusätzlich werden die Symmetrie zum Ursprung und das Globalverhalten untersucht. Die Vorteile einer Darstellung mithilfe von Linearfaktoren und die Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle werden hier thematisiert (→ Wiederholung Gleichungen lösen).</i></p> <p>Hinweis: Kontexte (Sachzusammenhang) spielen in diesem Unterrichtsvorhaben eine untergeordnete Rolle.</p>

Thema: Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A4)	
Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
<p>Inhaltsbezogene Kompetenzen: <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> nennen die Kosinusfunktion als Ableitung der Sinusfunktion begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten und wenden die Summen- und Faktorregel auf ganzrationale Funktionen an lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern oder Substituieren auf lineare und quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne digitale Hilfsmittel verwenden das notwendige Kriterium und das Vorzeichenwechselkriterium zur Bestimmung von Extrempunkten unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen <p>Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte): Problemlösen <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> erkennen Muster und Beziehungen (<i>Erkunden</i>) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (hier: Zurückführen auf Bekanntes) und wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus (<i>Lösen</i>) <p>Argumentieren <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (<i>Vermuten</i>) nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen und berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen etc.) (<i>Begründen</i>) erkennen fehlerhafte Argumentationsketten und korrigieren sie (<i>Beurteilen</i>) 	<p>Ein kurzes Wiederaufgreifen des graphischen Ableitens am Beispiel der Sinusfunktion führt zur Entdeckung, dass die Kosinusfunktion deren Ableitung ist.</p> <p>Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonie-Intervallen und der vier möglichen Vorzeichenwechsel an den Nullstellen der Ableitung untersucht. Die Untersuchungen auf Symmetrien und Globalverhalten werden fortgesetzt.</p> <p>Bezüglich der Lösung von Gleichungen im Zusammenhang mit der Nullstellenbestimmung wird durch geeignete Aufgaben Gelegenheit zum Üben von Lösungsverfahren <i>ohne Verwendung des GTR</i> (→ Wiederholung Gleichungen lösen) gegeben.</p> <p>Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Schülerinnen und Schüler auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms argumentieren. So erzwingt z. B. Achsensymmetrie die Existenz eines Extrempunktes auf der Symmetrieachse.</p> <p>Hinweis: Beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen können auch <i>Tangentengleichungen</i> bestimmt werden.</p>

Einführungsphase Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Thema: *Unterwegs in 3D – Koordinatisierungen des Raumes (E-G1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum
- stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)

Kommunizieren (Produzieren)

Die Schülerinnen und Schüler

- wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Ausgangspunkt ist das zweidimensionale kartesische Koordinatensystem. Auch weitere Koordinatisierungen können eingebunden werden, z.B. GPS, geographische Koordinaten. Um das geometrische Vorstellungsvermögen zu schulen, können auch verschiedene Schrägbilder thematisiert werden.

Außerdem besteht die Möglichkeit die Einführung im Kontext der Spidercam durchzuführen

(vgl.

<http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/materialdatenbank/nutzersicht/materialeintrag.php?matId=2037>)

Thema: *Vektoren bringen Bewegung in den Raum (E-G2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- deuten Vektoren (in Koordinatendarstellung) als Verschiebungen und kennzeichnen Punkte im Raum durch Ortsvektoren
- stellen gerichtete Größen (z. B. Geschwindigkeit, Kraft) durch Vektoren dar
- berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mit Hilfe des Satzes von Pythagoras
- addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kolinearität
- weisen Eigenschaften von besonderen Dreiecken und Vierecken mithilfe von Vektoren nach

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (*Lösen*)
- setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein (*Lösen*)
- wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus (*Lösen*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Als Kontext kann hier die Kurvenfahrt eines Autos an Hand von GPS-Daten und Geschwindigkeitsvektoren untersucht werden.

Durch Operieren mit Verschiebungspfeilen werden einfache geometrische Problemstellungen gelöst: Beschreibung von Diagonalen (insbesondere zur Charakterisierung von Viereckstypen), Auffinden von Mittelpunkten (ggf. auch Schwerpunkten), Untersuchung auf Parallelität.

Einführungsphase Stochastik (S)

Thema: <i>Den Zufall im Griff – Modellierung von Zufallsprozessen (E-S1)</i>	
Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
<p>Inhaltsbezogene Kompetenzen: <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • deuten Alltagssituationen als Zufallsexperimente und simulieren Zufallsexperimente • verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen • stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf und führen Erwartungswertbetrachtungen durch • beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Pfadregeln <p>Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte): Modellieren <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (<i>Strukturieren</i>) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (<i>Mathematisieren</i>) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (<i>Mathematisieren</i>) <p>Werkzeuge nutzen <i>Die Schülerinnen und Schüler</i> verwenden verschiedene digitale Werkzeuge</p> <ul style="list-style-type: none"> - zum Generieren von Zufallszahlen - Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen - Erstellen der Histogramme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen - Berechnen des Erwartungswerts 	<p>Beim Einstieg können Beispiele aus dem Bereich Glücksspiele oder Medizin betrachtet werden.</p> <p>Das Urnenmodell wird auch verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren.</p> <p><i>Die zentralen Begriffe Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert werden im Kontext von Glücksspielen erarbeitet und können durch zunehmende Komplexität der Spielsituationen vertieft werden.</i></p> <p>Digitale Werkzeuge werden zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung von händischem Rechnen verwendet.</p>

Thema: Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten (E-S2)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- modellieren Sachverhalte mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vier- oder Mehrfeldertafeln
- bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten
- prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit
- bearbeiten Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten.

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)

Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten [...] (*Rezipieren*)
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (*Produzieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Als Einstiegskontext zur Erarbeitung des fachlichen Inhaltes könnte das HIV-Testverfahren dienen, eine Möglichkeit zur Vertiefung böte dann die Betrachtung eines Diagnosetests zu einer häufiger auftretenden Erkrankung (z. B. Grippe).

Um die Übertragbarkeit des Verfahrens zu sichern, sollen insgesamt mindestens zwei Beispiele aus unterschiedlichen Kontexten betrachtet werden.

Zur Förderung des Verständnisses der Wahrscheinlichkeitsaussagen werden parallel Darstellungen mit absoluten Häufigkeiten verwendet.

Die Schülerinnen und Schüler sollen zwischen verschiedenen Darstellungsformen (Baumdiagramm, Mehrfeldertafel) wechseln können und diese zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung und zum Rückschluss auf unbekanntes Astwahrscheinlichkeiten nutzen können.

Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung.

Q-Phase Grundkurs Funktionen und Analysis (A)

Thema: *Optimierungsprobleme (Q-GK-A1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien [...] zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten
- führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese (Zielfunktionen ohne rationalen Exponenten)

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor. (*Strukturieren*)
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (*Mathematisieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (*Validieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Leitfrage: „mit den Funktionen zur optimalen Lösung“

Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Die Bestimmung der extremalen Steigung erfolgt zunächst über das Vorzeichenwechselkriterium (an den Nullstellen der zweiten Ableitung). Extrempunkte werden innerhalb des Kontexts vertieft.

Innerhalb der Optimierungsaufgaben bietet sich eine Vielzahl an Kontexten, die sich jedoch stark in ihren Anforderungsbereichen unterscheiden. Daher kann hier eine Binnendifferenzierung z.B. in homogenen Gruppen umgesetzt werden.

Insbesondere das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. *Es wird deshalb empfohlen, den Lernenden hinreichend Zeit zu geben, u. a. mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen.*

An Problemen, die auf quadratische Zielfunktionen führen, sollten auch unterschiedliche Lösungswege aufgezeigt und verglichen werden. Eine Verallgemeinerte Vorgehensweise sollte dann festgelegt werden. In der Einführung der Optimierungsaufgaben sollte der GTR genutzt werden, da der Schwerpunkt der Schwierigkeit auf der Ermittlung der Zielfunktion liegen sollte. Später bietet es sich außerdem an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben.

<p>Problemlösen <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation (<i>Erkunden</i>) • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle ...) aus, um die Situation zu erfassen (<i>Erkunden</i>) • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern ...) (<i>Lösen</i>) • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein (<i>Lösen</i>) • berücksichtigen einschränkende Bedingungen (<i>Lösen</i>) • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (<i>Lösen</i>) • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten (<i>Reflektieren</i>) 	<p>An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“).</p> <p>Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik untersucht.</p> <p><i>Abschließend empfiehlt es sich, ein Problem zu behandeln, das die Schülerinnen und Schüler nur durch systematisches Probieren oder anhand des Funktionsgraphen lösen können: Aufgabe zum „schnellsten Weg“.</i></p>
--	---

Thema: Funktionen beschreiben Formen - Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (Q-GK-A2)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“), insbesondere sollen Funktionen 3. oder 4. Grades modelliert werden mit z.B. Berücksichtigung der Symmetrie
- beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung
- verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten
- beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
- wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*)
- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (*Strukturieren*)
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (*Mathematisieren*)

Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“

Anknüpfend an die Einführungsphase (vgl. Thema E-A1) werden an einem Beispiel in einem geeigneten Kontext (z. B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Anschließend werden aus gegebenen Punkten Gleichungssysteme für die Parameter der Normalform aufgestellt.

Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme oder der Nürburgring gewählt werden.

Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet.

Im Weiteren sollen die Funktionsklassen zur Modellierung auf ganzrationale Funktionen 3. oder 4. Grades erweitert werden und über gegebene Punkte, Symmetrieüberlegungen und Bedingungen an die Ableitung Gleichungen zur Bestimmung der Parameter aufzustellen. Hier bieten sich nach einem einführenden Beispiel offene Unterrichtsformen (z. B. Lerntheke) an.

- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (*Validieren*)
- verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (*Validieren*)
- reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (*Validieren*)

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum ... Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
- zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
- nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden [...], Berechnen und Darstellen

Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen.

Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen.

Thema: Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-GK-A3)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe
- deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext
- skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion

Prozessbezogene Kompetenzen:

Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus [...] mathemathikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen (*Rezipieren*)
- formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege (*Produzieren*)
- wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus (*Produzieren*)
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (*Produzieren*)
- dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar (*Produzieren*)
- erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (*Produzieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb sollten hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen werden (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge).

Der Einstieg kann über ein Stationenlernen, eine arbeitsteilige Gruppenarbeit oder ein Lerntempoduett erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten.

Die Schülerinnen und Schüler sollen eigenständig unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweise Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.

Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren.

So entdecken die Schülerinnen und Schüler die Komplementarität zur Differentialrechnung. Dies kann zur Überleitung in das folgende Unterrichtsvorhaben genutzt werden.

Thema: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-GK-A4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs
- erläutern geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
- nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen
- bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen
- bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge
- ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate
- bestimmen Flächeninhalte mit Hilfe von bestimmten Integralen

Prozessbezogene Kompetenzen:

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Vermutungen auf (*Vermuten*)
- unterstützen Vermutungen beispielgebunden (*Vermuten*)
- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (*Vermuten*)
- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (*Begründen*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Schülerinnen und Schüler sollen hier (wieder-)entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist. Dazu kann das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben (vgl. Thema Q-GK-A3) entwickelte numerische Näherungsverfahren auf den Fall angewendet werden, dass für die Änderungsrate ein Funktionsterm gegeben ist.

Die Graphen der Änderungsrate und der Bestandsfunktion können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen.

Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen.

Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert (ggf. auch im Lehrervortrag).

Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet.

In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Gesamtbeständen zur Verfügung.

Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zw. Graphen werden die Schnittstellen i.d.R. mit dem GTR bestimmt.

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen [...] digitale Werkzeuge [*Erg. Fachkonferenz: Tabellenkalkulation und Funktionenplotter*] zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen
- Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
 - ... Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse
 - ... Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals

Komplexere Übungsaufgaben sollten am Ende des Unterrichtsvorhabens bearbeitet werden, um Vernetzungen mit den Kompetenzen der bisherigen Unterrichtsvorhaben (Funktionsuntersuchungen, Aufstellen von Funktionen aus Bedingungen) herzustellen.

Thema: Natürlich: Exponentialfunktionen (Q-GK-A5)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion
- untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze
- interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang
- bilden die Ableitungen weiterer Funktionen:
- natürliche Exponentialfunktion

Prozessbezogene Kompetenzen:

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (*Erkunden*)
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (*Lösen*)
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme) (*Lösen*)
- führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (*Lösen*)
- variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung (*Reflektieren*).

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens sollte eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte z. B. in Gruppenarbeit mit Präsentation stehen (Wachstum und Zerfall).

Kontexte (optional): *Ausbreitung von Erkrankungen (Ebola), Radioaktiver Zerfall (Tschernobyl, Fukushima), Abbau von Medikamenten im Körper.*

Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate.

Optional: *In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet. Umgekehrt suchen die Lernenden zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle.*

Dazu könnten sie eine Wertetabelle des Differenzenquotienten aufstellen, die sie immer weiter verfeinern oder in der Grafik ihres GTR experimentieren, indem sie Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion legen. Mit diesem Ansatz kann in einem DGS auch der Graph der Ableitungsfunktion als Ortskurve gewonnen werden.

Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich quasi automatisch die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen → Übergang zur e-Funktion.

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum ... zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
- ... grafischen Messen von Steigungen
- ... entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus
- ... nutzen [...] digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen

Thema: Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-GK-A6)

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
<p>Inhaltsbezogene Kompetenzen: <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze • interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext • bilden die Ableitungen weiterer Funktionen: <ul style="list-style-type: none"> - Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten • bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) • wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an • wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen an • bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate <p>Prozessbezogene Kompetenzen: Modellieren <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (<i>Strukturieren</i>) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (<i>Mathematisieren</i>) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (<i>Mathematisieren</i>) 	<p>Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten wird die Kettenregel eingeführt, um auch (hilfsmittelfrei) Ableitungen für die entsprechenden Funktionsterme bilden zu können.</p> <p>Als Beispiel für eine Summenfunktion wird eine Kettenlinie modelliert. $y = (e^{ax} + e^{-ax})/(2a)$</p> <p>An mindestens einem Beispiel sollte auch ein beschränktes Wachstum untersucht werden, z.B. $f(x) = S - c \cdot e^{-kx}$.</p> <p>An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen erarbeitet. In diesem Zusammenhang wird die Produktregel zum Ableiten eingeführt.</p> <p>In diesen Kontexten ergeben sich ebenfalls Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird.</p> <p>Parameter werden nur in konkreten Kontexten und nur exemplarisch variiert (keine systematische Untersuchung von Funktionenscharen). Dabei werden z. B. zahlenmäßige Änderungen des Funktionsterms bezüglich ihrer Auswirkung untersucht und im Hinblick auf den Kontext interpretiert.</p>

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none">• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (<i>Mathematisieren</i>)• ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu (<i>Mathematisieren</i>)• beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (<i>Validieren</i>)• beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (<i>Validieren</i>)• verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (<i>Validieren</i>)• reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (<i>Validieren</i>) | |
|---|--|

Q-Phase Grundkurs Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Thema: *Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden (Q-GK-G1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar
- interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*)
- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (*Strukturieren*)
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (*Mathematisieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (*Validieren*)
- verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (*Validieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden.

Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren.

In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden.

Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann.

Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen sollen auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden.

Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden.

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen Geodreiecke [...] geometrische Modelle und Dynamische-Geometrie-Software
- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
... grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden
... Darstellen von Objekten im Raum

Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet hier die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann.

Inhaltlich schließt die Behandlung von Schrägbildern an das Thema E-G1 an.

Werkzeuge:

- Software wie KL Mathematik, GeoGebra, VektorX oder andere. Darstellungsprogramm für Raumgeometrie (CD integriert mit dem Buch- z.B. Lambacher-Schweizer)
- „Papp-Vektorraum“ (Bisterfeld)
- GTR-zur Lösungskontrolle

Thema: Lineare Algebra als Schlüssel zur Lösung von geometrischen Problemen (Q-GK-G2)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Ebenen in Parameterform dar
- untersuchen Lagebeziehungen [...] zwischen Geraden und Ebenen
- berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext
- stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar
- beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
- interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen

Prozessbezogene Kompetenzen:

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen (*Erkunden*)
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (*Lösen*)
- wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen (*Lösen*)
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, [...]) (*Lösen*)
- führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (*Lösen*)
- vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten (*Reflektieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Als Einstiegskontext für die Parametrisierung einer Ebene kann eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten dienen. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G2 wieder aufgegriffen.

Wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, können durch Einschränkung des Definitionsbereichs Parallelogramme und Dreiecke beschrieben und auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden, die über die Kompetenzerwartungen des KLP hinausgehen.

In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösekompetenzen erworben, indem sich heuristische Strategien bewusst gemacht werden (eine planerische Skizze anfertigen, die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt beschreiben, geometrische Hilfsobjekte einführen, bekannte Verfahren zielgerichtet einsetzen und in komplexeren Abläufen kombinieren und unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt vergleichen).

Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem.

Die Untersuchung von Schattenwürfen eines Mastes auf eine Dachfläche z. B. motiviert eine Fortführung der systematischen Auseinandersetzung (Q-GK-A2) mit linearen Gleichungssystemen, mit der Matrix-Vektor-Schreibweise und mit dem Gauß-Verfahren.

- beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz (*Reflektieren*)
- analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern (*Reflektieren*)

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum ... Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen

Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt, zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung sollte stets deutlich werden.

Werkzeuge:

- Software wie *KL Mathematik, GeoGebra, VektorX* oder andere Darstellungsprogramme für Raumgeometrie (CD integriert mit dem Buch- z.B. *Lambacher-Schweizer*)
- „Papp-Vektorraum“ (*Bisterfeld*)
- *GTR-zur Lösungskontrolle*

Thema: Eine Sache der Logik und der Begriffe: Untersuchung von Lagebeziehungen (Q-GK-G3)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- untersuchen Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden [...]

Prozessbezogene Kompetenzen:

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (*Vermuten*)
- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober- / Unterbegriff) (*Begründen*)
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (*Begründen*)
- berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) (*Begründen*)
- überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (*Beurteilen*)

Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen (*Rezipieren*)
- verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang (*Produzieren*)
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (*Produzieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Hinweis: Bei zweidimensionalen Abbildungen (z. B. Fotografien) räumlicher Situationen geht in der Regel die Information über die Lagebeziehung von Objekten verloren. Verfeinerte Darstellungsweisen (z. B. unterbrochene Linien, schraffierte Flächen, gedrehtes Koordinatensystem) helfen, dies zu vermeiden und Lagebeziehungen systematisch zu untersuchen.

Der Fokus der Untersuchung von Lagebeziehungen liegt auf dem logischen Aspekt einer vollständigen Klassifizierung sowie einer präzisen Begriffsbildung (z. B. Trennung der Begriffe „parallel“, „echt parallel“, „identisch“).

Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Es werden möglichst selbstständig solche Darstellungen entwickelt, die auf Lernplakaten dokumentiert, präsentiert, verglichen und hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit beurteilt werden können. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens sollen nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden.

Eine analoge Bearbeitung der in Q-GK-G2 erarbeiteten Beziehungen zwischen Geraden und Ebenen bietet sich an.

Als Kontext kann dazu die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) aus Q-GK-G1 wieder aufgegriffen werden. Dabei wird evtl. die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten relevant.

<ul style="list-style-type: none"> • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (<i>Produzieren</i>) • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität (<i>Diskutieren</i>) 	<p>Bei genügend zur Verfügung stehender Zeit oder binnendifferenziert könnte (über den Kernlehrplan hinausgehend) das <u>Abstandsminimum numerisch, grafisch oder algebraisch mit den Verfahren der Analysis ermittelt werden.</u></p> <p>Begrifflich davon abgegrenzt wird der Abstand zwischen den Flugbahnen. Dies motiviert die Beschäftigung mit orthogonalen Hilfsgeraden (Q-GK-G4).</p> <p>Werkzeuge:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Software wie KL Mathematik, GeoGebra, VektorX oder andere. Darstellungsprogramm für Raumgeometrie (CD integriert mit dem Buch- z.B. Lambacher-Schweizer) • GTR zur Lösungskontrolle
---	--

<p>Thema: Räume vermessen – mit dem Skalarprodukt Polygone und Polyeder untersuchen (Q-GK-G4)</p>	
<p>Zu entwickelnde Kompetenzen</p> <p>Inhaltsbezogene Kompetenzen: <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) 	<p>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</p> <p>Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. <u>Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt (alternativ zu einer Herleitung aus dem Kosinussatz).</u></p> <p><i>Eine weitere Bedeutung des Skalarproduktes kann mit den gleichen Überlegungen am Beispiel der physikalischen Arbeit erschlossen werden.</i></p>

Prozessbezogene Kompetenzen:

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (*Erkunden*)
- analysieren und strukturieren die Problemsituation (*Erkunden*)
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (*Lösen*)
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, [...]) (*Lösen*)
- wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus (*Lösen*)
- beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz (*Reflektieren*)

Bei hinreichend zur Verfügung stehender Zeit kann in Anwendungskontexten (z. B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes, vgl. Q-GK-G3) entdeckt werden, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. als Streckenlänge über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Bei dieser Problemstellung sollten unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen werden.

Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für (im Sinne des Problemlösens offen angelegte) exemplarische geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte (z. B. Gebäude) bezogen werden.

Dabei kann z. B. der Nachweis von Dreiecks- bzw. Viereckstypen (anknüpfend an das Thema E-G2) wieder aufgenommen werden.

Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt.

Werkzeuge:

- *Software wie KL Mathematik, GeoGebra, VektorX oder andere. Darstellungsprogramm für Raumgeometrie (CD integriert mit dem Buch- z.B. Lambacher-Schweizer);*
- *Modelle von Raumfiguren.*

Q-Phase Grundkurs Stochastik (S)

Thema: *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-GK-S1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben
- erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen
- bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (*Strukturieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt.

Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen wird durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe I reaktiviert (zum Beispiel Boxplots).

Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber unterschiedlicher Streuung wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; anhand gezielter Veränderungen der Verteilung werden die Auswirkungen auf deren Kenngrößen untersucht und interpretiert.

Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt.

Hinweis: Teile des Skripts der Fachschaft Mathematik zur beschreibenden Statistik können hier verwendet werden (→ Erwartungswert, Varianz)

Thema: Treffer oder nicht? – Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen (Q-GK-S2)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente
- erklären die Binomialverteilung im Kontext und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten
- beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung
- bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen [...]

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (*Strukturieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen den GTR und Tabellenkalkulationen [...]

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet.

Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells „Bernoullikette“ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Hinweis: Optional kann der Bereich Kombinatorik vertieft werden.

Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung bieten sich Würfelspiele an (Fragestellung: Anzahl der 1-en in n Würfeln). Ferner: Münzwurf (mit fairer und unfairer Münze), Multiple-Choice-Tests oder das Galtonbrett bzw. seine Simulation.

Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt dabei durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR.

Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung für ein zweistufiges Bernoulliexperiment plausibel gemacht werden. Auf eine allgemeingültige Herleitung wird verzichtet.

Durch Erkunden wird festgestellt, dass unabhängig von n und p ca. 68% der Ergebnisse in der 1σ -Umgebung des Erwartungswertes liegen.

- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
 - ... Generieren von Zufallszahlen
 - ... Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen
 - ... Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen
 - ... Variieren der Parameter von Binomialverteilungen
 - ... Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung)

Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.

Thema: Modellieren mit Binomialverteilungen (Q-GK-S3)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen
- schließen anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (*Strukturieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter [...] Modelle für die Fragestellung (*Validieren*)
- reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (*Validieren*)

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (*Begründen*)
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (*Begründen*)
- verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten (*Begründen*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

In verschiedenen Sachkontexten wird zunächst die Möglichkeit einer Modellierung der Realsituation mithilfe der Binomialverteilung überprüft. Die Grenzen des Modellierungsprozesses werden aufgezeigt und begründet. In diesem Zusammenhang werden geklärt:

- die Beschreibung des Sachkontextes durch ein Zufallsexperiment
- die Interpretation des Zufallsexperiments als Bernoullikette
- die Definition der zu betrachtenden Zufallsgröße
- die Unabhängigkeit der Ergebnisse (Wdh. EF)
- die Benennung von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p

Dies erfolgt in unterschiedlichsten Realkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“).

Prüfverfahren mit vorgegebenen Entscheidungsregeln bieten einen besonderen Anlass, um von einer (ein- oder mehrstufigen) Stichprobenentnahme aus einer Lieferung auf nicht bekannte Parameter in der Grundgesamtheit zu schließen.

Hinweis: Eine Stichprobenentnahme kann auch auf dem GTR simuliert werden.

Thema: *Von Übergängen und Prozessen (G-GK-S4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen
- verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände)

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (*Vermuten*)
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (*Begründen*)
- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (*Begründen*)
- überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (*Beurteilen*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Hinweis:

Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.

Der Auftrag an Schülerinnen und Schüler, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln.

Alternativ: Einführendes Wirtschaftsbeispiel, zum Beispiel Kaffeesorten oder Baumärkte und Vernetzung mit Linearer Algebra.

Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an.

Q-Phase Leistungskurs Funktionen und Analysis (A)

Thema: *Optimierungsprobleme (Q-LK-A1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien [...] zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten
- führen Eigenschaften von zusammengesetzten Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) argumentativ auf deren Bestandteile zurück
- wenden die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an
- führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese
- bilden die Ableitungen weiterer Funktionen insbesondere von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*)
- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (*Strukturieren*)
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (*Mathematisieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Vali-*

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Leitfrage: „mit der Funktion zur optimalen Lösung“

Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Die Bestimmung der extremalen Steigung erfolgt zunächst über das Vorzeichenwechselkriterium (an den Nullstellen der zweiten Ableitung). => Vertiefung der Extrempunkte.

Im Zusammenhang mit geometrischen und ökonomischen Kontexten entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen von Wurzelfunktionen sowie die Produkt- und Kettenregel und wenden sie an.

Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege zu entwickeln.

An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“).

Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht.

dieren)

- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (*Validieren*)
- verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (*Validieren*)
- reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (*Validieren*)

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation (*Erkunden*)
- wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle ...) aus, um die Situation zu erfassen (*Erkunden*)
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Verallgemeinern ...) (*Lösen*)
- setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein (*Lösen*)
- berücksichtigen einschränkende Bedingungen (*Lösen*)
- vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten (*Reflektieren*)

Thema: Funktionen beschreiben Formen - Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (Q-LK-A2)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- a bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“)
- a beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung
- a verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten
- a beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
- a wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind
- a interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionenscharen

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- a erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*)
- a treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (*Strukturieren*)
- a übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (*Mathematisieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“

Anknüpfend an die Einführungsphase (vgl. Thema E-A1) werden in unterschiedlichen Kontexten (z. B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst.

Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme oder der Nürburgring gewählt werden.

Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet.

Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkten, Symmetrieüberlegungen, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt.

Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen.

- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (*Validieren*)
- verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (*Validieren*)
- reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (*Validieren*)

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum ... Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
- ... zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
- nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden [...], Berechnen und Darstellen

Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen.

Über freie Parameter (aus unterbestimmten Gleichungssystemen) werden Lösungsscharen erzeugt und deren Elemente hinsichtlich ihrer Eignung für das Modellierungsproblem untersucht und beurteilt. An innermathematischen „Steckbriefen“ werden Fragen der Eindeutigkeit der Modellierung und der Einfluss von Parametern auf den Funktionsgraphen untersucht.

Zur Förderung besonders leistungsstarker Schülerinnen und Schüler bietet es sich an, sie selbstständig über die Spline-Interpolation forschen und referieren zu lassen.

Thema: Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-LK-A3)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe
- deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext
- skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion

Prozessbezogene Kompetenzen:

Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus [...] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen (*Rezipieren*)
- formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege (*Produzieren*)
- wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus (*Produzieren*)
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (*Produzieren*)
- dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar (*Produzieren*)
- erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (*Produzieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Hinweis: Auch im Leistungskurs bilden eigene anschauliche Erfahrungen ein gutes Fundament für den weiteren Begriffsaufbau. Deshalb hat sich die Fachkonferenz für einen ähnlichen Einstieg in die Integralrechnung im Leistungskurs entschieden wie im Grundkurs. Er unterscheidet sich allenfalls durch etwas komplexere Aufgaben von der Einführung im Grundkurs.

Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt werden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit - Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Daneben wird die Konstruktion einer Größe (z. B. physikalische Arbeit) erforderlich, bei der es sich nicht um die Rekonstruktion eines Bestandes handelt.

Der Einstieg kann über ein Stationenlernen, eine arbeitsteilige Gruppenarbeit oder ein Lerntempoduett erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten.

Die Schülerinnen und Schüler sollen eigenständig unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweise Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.

Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren.

So entdecken die Schülerinnen und Schüler die Komplementarität zur Differentialrechnung. Dies kann zur Überleitung in das folgende Unterrichtsvorhaben genutzt werden.

Thema: Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-LK-A4)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs
- erläutern den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion
- deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen
- nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen
- begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs
- bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen
- bestimmen Integrale numerisch [...]
- ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion
- bestimmen Flächeninhalte und Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mit Hilfe von bestimmten und uneingentlichen Integralen

Prozessbezogene Kompetenzen:

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Vermutungen auf (*Vermuten*)
- unterstützen Vermutungen beispielgebunden (*Vermuten*)
- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (*Vermuten*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Schülerinnen und Schüler sollen hier selbst entdecken, dass die Integralfunktion J_a eine Stammfunktion der Randfunktion ist. Dazu wird das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben entwickelte numerische Näherungsverfahren zur Rekonstruktion einer Größe aus der Änderungsrate auf eine kontextfrei durch einen Term gegebene Funktion angewendet und zur Konstruktion der Integralfunktion genutzt (Verallgemeinerung).

Die Graphen der Randfunktion und der genäherten Integralfunktion können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen. Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen.

Um diesen Zusammenhang zu begründen, wird der absolute Zuwachs $J_a(x+h) - J_a(x)$ geometrisch durch Rechtecke nach oben und unten abgeschätzt. Der Übergang zur relativen Änderung mit anschließendem Grenzübergang führt dazu, die Stetigkeit von Funktionen zu thematisieren, und motiviert, die Voraussetzungen zu präzisieren und den Hauptsatz formal exakt zu notieren.

Hier bieten sich Möglichkeiten zur inneren Differenzierung:

Formalisierung der Schreibweise bei der Summenbildung, exemplarische Einschachtelung mit Ober- und Untersummen, formale Grenzwertbetrachtung, Vergleich der Genauigkeit unterschiedlicher Abschätzungen.

In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Produktsummen zur Verfügung.

- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (*Begründen*)
- verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten (*Begründen*)
- erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise (*Begründen*)
- überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (*Beurteilen*)

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen [...] digitale Werkzeuge [*Erg. Fachkonferenz: Tabellenkalkulation und Funktionenplotter*] zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen
- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum ...
 - ... Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse
 - ... Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals

Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden.

Bei der Berechnung der Volumina wird stark auf Analogien zur Flächenberechnung verwiesen. (Gedanklich wird mit einem „Eierschneider“ der Rotationskörper in berechenbare Zylinder zerlegt, analog den Rechtecken oder Trapezen bei der Flächenberechnung. Auch die jeweiligen Summenformeln weisen Entsprechungen auf.)

Mit der Mittelwertberechnung kann bei entsprechend zur Verfügung stehender Zeit (über den Kernlehrplan hinausgehend) noch eine weitere wichtige Grundvorstellung des Integrals erarbeitet werden. Hier bieten sich Vernetzungen mit dem Inhaltsfeld Stochastik an.

Thema: Natürlich: Exponentialfunktionen und Logarithmus (Q-LK-A5)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und begründen die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion
- nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion
- bilden die Ableitungen weiterer Funktionen:
 - natürliche Exponentialfunktion
 - Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis
 - natürliche Logarithmusfunktion
- nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: $x \rightarrow 1/x$.

Prozessbezogene Kompetenzen:

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (*Erkunden*)
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (*Lösen*)
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme) (*Lösen*)
- führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (*Lösen*)
- variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung (*Reflektieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens empfiehlt sich eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte in Gruppenarbeit mit Präsentation (Wachstum und Zerfall).

Kontexte (optional): *Ausbreitung von Erkrankungen (Ebola), Radioaktiver Zerfall (Tschernobyl, Fukushima), Abbau Medikamente im Körper.*

Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen.

Die Eulersche Zahl kann z. B. über das Problem der stetigen Verzinsung eingeführt werden. Der Grenzübergang wird dabei zunächst durch den GTR unterstützt. Da der Rechner dabei numerisch an seine Grenzen stößt, wird aber auch eine Auseinandersetzung mit dem Grenzwertbegriff motiviert.

Optional: Die Frage nach der Ableitung einer allgemeinen Exponentialfunktion an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet. Umgekehrt wird zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle gesucht.

Dazu kann man eine Wertetabelle des Differenzenquotienten aufstellen, die immer weiter verfeinert wird. Oder man experimentiert in der Grafik des GTR, indem Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion gelegt werden. Mit diesem Ansatz kann in einem DGS auch der Graph der Ableitungsfunktion als Ortskurve gewonnen werden.

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum ... zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
- ... grafischen Messen von Steigungen
- entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus
- nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen

Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich automatisch, dass für die Euler'sche Zahl als Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen.

Umkehrprobleme im Zusammenhang mit der natürlichen Exponentialfunktion werden genutzt, um den natürlichen Logarithmus zu definieren und damit auch alle Exponentialfunktionen auf die Basis e zurückzuführen. Mit Hilfe der schon bekannten Kettenregel können dann auch allgemeine Exponentialfunktionen abgeleitet werden.

Eine Vermutung zur Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion wird graphisch geometrisch mit einem DGS als Ortskurve gewonnen und anschließend mit der Kettenregel bewiesen.

Thema: Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-LK-A6)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsvorgängen und vergleichen die Qualität der Modellierung exemplarisch mit einem begrenzten Wachstum
- bestimmen Integrale [...] mithilfe von gegebenen oder Nachschlagewerken entnommenen Stammfunktionen
- ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*)
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (*Mathematisieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (*Validieren*)
- verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (*Validieren*)
- reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (*Validieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Als Beispiel für eine Summenfunktion eignet sich die Modellierung einer Kettenlinie. An mindestens einem Beispiel wird auch ein beschränktes Wachstum untersucht.

An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich deren Verhalten für betragsgroße Argumente erarbeitet.

Auch in diesen Kontexten ergeben sich Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird.

Weitere Kontexte bieten Anlass zu komplexen Modellierungen mit Funktionen anderer Funktionenklassen, insbesondere unter Berücksichtigung von Parametern, für die Einschränkungen des Definitionsbereiches oder Fallunterscheidungen vorgenommen werden müssen.

Vernetzungsmöglichkeiten mit der Stochastik sollten aufgegriffen werden (z. B. Gauß'sche Glockenkurve – sofern zu diesem Zeitpunkt bereits behandelt).

Q-Phase Leistungskurs Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Thema: *Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden (Q-LK-G1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
<p>Inhaltsbezogene Kompetenzen: <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> stellen Geraden in Parameterform dar interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar <p>Prozessbezogene Kompetenzen: Modellieren <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (<i>Strukturieren</i>) treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (<i>Strukturieren</i>) übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (<i>Mathematisieren</i>) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (<i>Mathematisieren</i>) beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (<i>Validieren</i>) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (<i>Validieren</i>) 	<p>Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden.</p> <p><i>Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit mittels einer Funktion zu variieren, z. B. zur Beschreibung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung.</i></p> <p>In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (hier die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden.</p> <p>Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs werden Strahlen und Strecken einbezogen. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen erlauben die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen. Solche Darstellungen sollten geübt werden.</p>

Werkzeuge nutzen*Die Schülerinnen und Schüler*

- nutzen Geodreiecke, geometrische Modelle und Dynamische-Geometrie-Software
- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum ... grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden
- ... Darstellen von Objekten im Raum

Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann. Inhaltlich schließt die Behandlung von Schrägbildern an das Thema E-G1 an.

Werkzeuge:

- *Software wie KL Mathematik, GeoGebra, VektorX oder andere Darstellungsprogramm für Raumgeometrie (CD integriert mit dem Buch- z.B. Lambacher-Schweizer)*
- *GTR zur Lösungskontrolle*

Thema: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (Q-LK-G2)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- ◇ deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es
- untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung)
- bestimmen Abstände zwischen Punkten und Geraden [...]

Prozessbezogene Kompetenzen:

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (*Erkunden*)
- analysieren und strukturieren die Problemsituation (*Erkunden*)
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (*Lösen*)
- vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten (*Reflektieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt.

Eine weitere Bedeutung des Skalarproduktes kann mit den gleichen Überlegungen am Beispiel der physikalischen Arbeit erschlossen werden.

Die formale Frage nach der Bedeutung eines Produktes von zwei Vektoren sowie den dabei gültigen Rechengesetzen wird im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z. B. Division durch einen Vektor) gestellt.

Anknüpfend an das Thema E-G2 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarproduktes untersucht. Dabei bieten sich vorrangig Problemlöseaufgaben (z. B. Nachweis von Viereckstypen) an.

Ein Vergleich von Lösungswegen mit und ohne Skalarprodukt kann im Einzelfall dahinterliegende Sätze transparent machen wie z. B. die Äquivalenz der zum Nachweis einer Raute benutzten Bedingungen:

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ und $(\vec{a})^2 = (\vec{b})^2$ für die Seitenvektoren \vec{a} und \vec{b} eines Parallelogramms.

In Anwendungskontexten (z. B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes) wird entdeckt, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Hierbei werden unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen. Eine Vernetzung mit Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung bietet sich an.

Thema: Ebenen als Lösungsmengen von linearen Gleichungen und ihre Beschreibung durch Parameter (Q-LK-G3)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar
- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es
- stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen

Prozessbezogene Kompetenzen:

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff) (*Begründen*)
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (*Begründen*)
- überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (*Beurteilen*)

Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen (*Rezipieren*)
- formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege (*Produzieren*)
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (*Produzieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Im Sinne verstärkt wissenschaftspropädeutischen Arbeitens wird folgender anspruchsvoller, an Q-LK-G2 anknüpfender Weg vorgeschlagen: Betrachtet wird die Gleichung: $\vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$. Durch systematisches Probieren oder Betrachten von Spezialfällen ($\vec{a} = \vec{0}$) wird die Lösungsmenge geometrisch als Ebene gedeutet.

Die unterschiedlichen Darstellungsformen dieser Ebenengleichung und ihre jeweilige geometrische Deutung (Koordinatenform, Achsenabschnittsform, Hesse-Normalenform als Sonderformen der Normalenform) gegenübergestellt, verglichen und in Beziehung gesetzt. Dabei intensiviert der kommunikative Austausch die fachlichen Aneignungsprozesse. Die Achsenabschnittsform erleichtert es, Ebenen zeichnerisch darzustellen. Zur Veranschaulichung der Lage von Ebenen wird eine räumliche Geometriesoftware verwendet.

Vertiefend (und über den Kernlehrplan hinausgehend) kann bei genügend Zeit die Lösungsmenge eines Systems von Koordinatengleichungen als Schnittmenge von Ebenen geometrisch gedeutet werden. Dabei wird die Matrix-Vektor-Schreibweise genutzt. Dies bietet weitere Möglichkeiten, bekannte mathematische Sachverhalte zu vernetzen. Weitere Vertiefung: Q-LK-G4.

Als weitere Darstellungsform wird nun die Parameterform der Ebenengleichung entwickelt. Als Einstiegskontext dient eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus E-G2 aufgegriffen. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs werden Parallelogramme und Dreiecke beschrieben. So können anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden.

Ein Wechsel zwischen Koordinatenform und Parameterform der Ebene ist über die drei Achsenabschnitte möglich. Alternativ wird ein Normalenvektor mit Hilfe eines Gleichungssystems bestimmt.

Thema: Lagebeziehungen und Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten (Q-LK-G4)	
Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
<p>Inhaltsbezogene Kompetenzen: <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden [...] berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen <p>Prozessbezogene Kompetenzen: Argumentieren <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (<i>Vermuten</i>) stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff) (<i>Begründen</i>) nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (<i>Begründen</i>) berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige/hinreichende Bedingung, Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) (<i>Begründen</i>) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (<i>Beurteilen</i>) <p>Kommunizieren <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen (<i>Rezipieren</i>) 	<p>Die Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden ist eingebettet in die Untersuchung von Lagebeziehungen. Die Existenzfrage führt zur Unterscheidung der vier möglichen Lagebeziehungen.</p> <p>Als ein Kontext kann die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) aus Thema Q-LK-G1 wieder aufgenommen werden, insbesondere mit dem Ziel, die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten im Unterschied zur Abstandsberechnung zwischen den Flugbahnen zu vertiefen. Hier bietet sich wiederum eine Vernetzung mit den Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung an.</p> <p>Die Berechnung des Abstandes zweier Flugbahnen kann für den Vergleich unterschiedlicher Lösungsvarianten genutzt werden. Dabei wird unterschieden, ob die Lotfußpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke mitberechnet werden oder nachträglich aus dem Abstand bestimmt werden müssen.</p> <p>In der Rückschau sollten die Schüler nun einen Algorithmus entwickeln, um über die Lagebeziehung zweier Geraden zu entscheiden. Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Die Schülerinnen und Schüler können selbst solche Darstellungen entwickeln, auf Lernplakaten dokumentieren, präsentieren, vergleichen und in ihrer Brauchbarkeit beurteilen. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens sollten nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden.</p>

- verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang (*Produzieren*)
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (*Produzieren*)
- erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (*Produzieren*)
- vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität (*Diskutieren*)

Werkzeuge:

- Software wie *KL Mathematik*, *GeoGebra*, *VektorX* oder andere Darstellungsprogramme für Raumgeometrie (CD integriert mit dem Buch- z.B. *Lambacher-Schweizer*)
- *GTR* zur Lösungskontrolle

Thema: Untersuchungen an Polyedern (Q-LK-G5)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- ◇ stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar
- beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
- wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an
- interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen
- stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar
- untersuchen Lagebeziehungen [...] zwischen Geraden und Ebenen
- berechnen (Schnittpunkte von Geraden sowie) Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext
- untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung)
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen

Prozessbezogene Kompetenzen:

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (*Erkunden*)
- analysieren und strukturieren die Problemsituation (*Erkunden*)
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (*Lösen*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte bezogen werden.. Auch hier wird eine räumliche Geometriesoftware eingesetzt. Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt Die Bestimmung von Längen und Winkeln setzt das Thema Q-LK-G2 direkt fort. Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene erlauben Rückschlüsse auf ihre Lagebeziehung.

Abstände von Punkten zu Geraden (Q-LK-G2) und zu Ebenen (Q-LK-G3) ermöglichen es z. B., die Fläche eines Dreiecks oder die Höhe und das Volumen einer Pyramide zu bestimmen. Abgesehen von der Abstandsbeziehung zwischen Geraden (erst in Q-LK-G5) müssen weitere Formen der Abstandsberechnungen nicht systematisch abgearbeitet werden, sie können bei Bedarf im Rahmen von Problemlöseprozessen in konkrete Aufgaben integriert werden.

Das Gauß-Verfahren soll anknüpfend an das Thema Q-LK-A2 im Zusammenhang mit der Berechnung von Schnittfiguren oder bei der Konstruktion regelmäßiger Polyeder vertieft werden. Weiter bietet der Einsatz des GTR Anlass, z. B. über die Interpretation der trigonalisierten Koeffizientenmatrix die Dimension des Lösungsraumes zu untersuchen. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung und der algebraischen Formalisierung soll stets deutlich werden.

- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, [...]) (*Lösen*)
- wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus (*Lösen*)
- beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz (*Reflektieren*)

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum ... Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
- ... Durchführen von Operationen mit Vektoren und Matrizen

In diesem Unterrichtsvorhaben wird im Sinne einer wissenschaftspropädeutischen Grundbildung besonderer Wert gelegt auf eigenständige Lernprozesse bei der Aneignung eines begrenzten Stoffgebietes sowie bei der Lösung von problemorientierten Aufgaben.

Werkzeuge:

- Software wie *KL Mathematik*, *GeoGebra*, *VektorX* oder andere Darstellungsprogramme für Raumgeometrie (CD integriert mit dem Buch- z.B. *Lambacher-Schweizer*)
- *GTR* zur Lösungskontrolle

Thema: Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen und Beweisaufgaben (Q-LK-G6)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Geraden in Parameterform dar
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar
- stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar
- untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden und zwischen Geraden und Ebenen
- berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext
- untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung)
- stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*)
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (*Mathematisieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (*Validieren*)
- reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (*Validieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Hinweis: Angesichts des begrenzten Zeitrahmens ist es wichtig, den Fokus der Unterrichtstätigkeit nicht auf die Vollständigkeit einer „Rezept-sammlung“ und deren hieb- und stichfeste Einübung zu allen denkbaren Varianten zu legen, sondern bei den Schülerinnen und Schülern prozessbezogene Kompetenzen zu entwickeln, die sie in die Lage versetzen, problemhaltige Aufgaben zu bearbeiten und dabei auch neue Anregungen zu verwerten.

Deshalb beschließt die Fachkonferenz, Problemlösungen mit den prozessbezogenen Zielen zu verbinden, 1) eine planerische Skizze anzufertigen und die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt zu beschreiben, 2) geometrische Hilfsobjekte einzuführen, 3) an geometrischen Situationen Fallunterscheidungen vorzunehmen, 4) bekannte Verfahren zielgerichtet einzusetzen und in komplexeren Abläufen zu kombinieren, 5) unterschiedliche Lösungswege Kriterien gestützt zu vergleichen.

Bei der Durchführung der Lösungswege können die Schülerinnen und Schüler auf das entlastende Werkzeug des GTR zurückgreifen, jedoch steht dieser Teil der Lösung hier eher im Hintergrund und soll sogar bei aufwändigeren Problemen bewusst ausgeklammert werden.

Bei Beweisaufgaben sollen die Schülerinnen und Schüler Formalisierungen in Vektorschreibweise rezipieren und ggf. selbst vornehmen. Dabei spielt auch die Entdeckung einer Gesetzmäßigkeit – ggf. mit Hilfe von DGS – eine Rolle. Geeignete Beispiele bieten der Satz von Varignon oder der Sehnen-(Tangenten-)satz von Euklid.

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen (*Erkunden*)
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (*Lösen*)
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Verallgemeinern) (*Lösen*)
- führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (*Lösen*)
- vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten (*Reflektieren*)
- beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz (*Reflektieren*)
- analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern (*Reflektieren*)
- variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung (*Reflektieren*)

Die erworbenen Kompetenzen im Problemlösen sollen auch in Aufgaben zum Einsatz kommen, die einen Kontextbezug enthalten, so dass dieses Unterrichtsvorhaben auch unmittelbar zur Abiturvorbereitung überleitet bzw. zum Zweck der Abiturvorbereitung noch einmal wiederaufgenommen werden soll.

Q-Phase Leistungskurs Stochastik (S)

Thema: *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-LK-S1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben
- erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen
- bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (*Strukturieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt.

Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen wird durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler reaktiviert (zum Beispiel Boxplots).

Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; über gezielte Veränderungen der Verteilung wird ein Gefühl für die Auswirkung auf deren Kenngrößen entwickelt.

Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt.

Hinweis: Teile des Skripts der Fachschaft Mathematik zur beschreibenden Statistik können hier verwendet werden (→ Erwartungswert, Varianz)

Thema: Treffer oder nicht? – Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen (Q-LK-S2)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente
- erklären die Binomialverteilung einschließlich der kombinatorischen Bedeutung der Binomialkoeffizienten und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten
- nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (*Strukturieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen [...]
- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
- ... Generieren von Zufallszahlen
- ... Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen
- ... Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet.

Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette‘ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Hinweis: Optional kann der Bereich Kombinatorik vertieft werden.

Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung bieten sich Würfelspiele an (Fragestellung: Anzahl der 1-en in n Würfeln). Ferner: Münzwurf (mit fairer und unfairer Münze), Multiple-Choice-Tests oder das Galtonbrett bzw. seine Simulation.

Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“).

Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.

Thema: *Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (Q-LK-S3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung
- bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von (binomialverteilten) Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen
- nutzen die σ -Regeln für prognostische Aussagen
- nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen

Prozessbezogene Kompetenzen:

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- analysieren und strukturieren die Problemsituation (*Erkunden*)
- wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen (*Erkunden*)
- erkennen Muster und Beziehungen (*Erkunden*)
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (*Lösen*)
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern) (*Lösen*)
- interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung (*Reflektieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR.

Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung induktiv entdeckt werden. Dabei kann man wie folgt vorgehen: In einer Tabellenkalkulation wird bei festen n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit multipliziert. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Das Konzept der σ -Umgebungen wird durch experimentelle Daten abgeleitet. Es wird benutzt, um Prognoseintervalle anzugeben, den notwendigen Stichprobenumfang für eine vorgegebene Genauigkeit zu bestimmen und um das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz der großen Zahlen zu präzisieren.

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen [...]
 - verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
- ... Variieren der Parameter von Binomialverteilungen
... Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen
... Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung)
... Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen

Thema: *Ist die Glocke normal? (Q-LK-S4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion
- untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen
- beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion (Gauß'sche Glockenkurve)

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren [...] komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*)
- übersetzen [...] komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (*Mathematisieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (*Validieren*)
- reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (*Validieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. Dementsprechend kann der Einstieg in dieses Unterrichtsvorhaben über die Untersuchung von Summenverteilungen erfolgen:

Mit einer Tabellenkalkulation werden die Augensummen von zwei, drei, etc. Würfeln simuliert, wobei in der grafischen Darstellung die Glockenform zunehmend deutlicher wird.

Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich Mittelwert und Streuung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern μ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätzfehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang.

Da auf dem GTR die Normalverteilung einprogrammiert ist, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch kann bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann (vgl. Q-LK-A3). Die Visualisierung erfolgt mithilfe des GTR.

Theoretisch ist von Interesse, dass es sich bei der Gauß'schen Glockenkurve um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion (Gauß'sche Integralfunktion) kein Term angegeben werden kann.

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen Muster und Beziehungen (*Erkunden*)
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (*Lösen*)
- wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen (*Lösen*)

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
 - ... Generieren von Zufallszahlen
 - ... Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
 - ... Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen
 - ... Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen
- nutzen digitale Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen
- entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge, wählen sie gezielt aus und nutzen sie zum Erkunden ..., Berechnen und Darstellen
- reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge

Thema: *Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen (Q-LK-S5)*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- interpretieren Hypothesentests bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse
- beschreiben und beurteilen Fehler 1. und 2. Art

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*)
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (*Mathematisieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)

Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen (*Rezipieren*)
- formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege (*Produzieren*)
- führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei (*Diskutieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Zentral ist das Verständnis der Idee des Hypothesentests, d. h. mit Hilfe eines mathematischen Instrumentariums einzuschätzen, ob Beobachtungen auf den Zufall zurückzuführen sind oder nicht. Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen möglichst klein zu halten.

Die Logik des Tests soll dabei an datengestützten gesellschaftlich relevanten Fragestellungen, z. B. Häufungen von Krankheitsfällen in bestimmten Regionen oder alltäglichen empirischen Phänomenen (z. B. Umfrageergebnisse) entwickelt werden.

Im Rahmen eines realitätsnahen Kontextes werden folgende Fragen diskutiert:

- Welche Hypothesen werden aufgestellt? Wer formuliert diese mit welcher Interessenlage?
- Welche Fehlentscheidungen treten beim Testen auf? Welche Konsequenzen haben sie?

Durch Untersuchung und Variation gegebener Entscheidungsregeln werden die Bedeutung des Signifikanzniveaus und der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Fehlentscheidungen 1. und 2. Art zur Beurteilung des Testverfahrens erarbeitet.

Thema: Von Übergängen und Prozessen (Q-LK-S6)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen
- verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände)

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (*Vermuten*)
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (*Begründen*)
- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (*Begründen*)
- überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (*Beurteilen*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.

Der Auftrag an Schülerinnen und Schüler, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln.

Alternativ: Einführendes Wirtschaftsbeispiel, zum Beispiel Kaffeesorten oder Baumärkte mit Vernetzung zur Linearen Algebra.

Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung, absorbierender Zustand (= Zustand, der nicht mehr verlassen wird)). Auch hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an.

Eine nicht obligatorische Vertiefungsmöglichkeit besteht darin, Ausgangszustände über ein entsprechendes Gleichungssystem zu ermitteln und zu erfahren, dass der GTR als Hilfsmittel dazu die inverse Matrix bereitstellt.

2.2 Grundsätze der fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit

In Absprache mit der Lehrerkonferenz sowie unter Berücksichtigung des Schulprogramms hat die Fachkonferenz Mathematik die folgenden fachmethodischen und fachdidaktischen Grundsätze beschlossen. In diesem Zusammenhang beziehen sich die Grundsätze 1 bis 15 auf fächerübergreifende Aspekte, die auch Gegenstand der Qualitätsanalyse sind, die Grundsätze 16 bis 26 sind fachspezifisch angelegt.

Überfachliche Grundsätze:

- 1) Geeignete Problemstellungen zeichnen die Ziele des Unterrichts vor und bestimmen die Struktur der Lernprozesse.
- 2) Inhalt und Anforderungsniveau des Unterrichts entsprechen dem Leistungsvermögen der Schüler/innen.
- 3) Die Unterrichtsgestaltung ist auf die Ziele und Inhalte abgestimmt.
- 4) Medien und Arbeitsmittel sind schülernah gewählt.
- 5) Die Schüler/innen erreichen einen Lernzuwachs.
- 6) Der Unterricht fördert eine aktive Teilnahme der Schüler/innen.
- 7) Der Unterricht fördert die Zusammenarbeit zwischen den Schülern/innen und bietet ihnen Möglichkeiten zu eigenen Lösungen.
- 8) Der Unterricht berücksichtigt die individuellen Lernwege der einzelnen Schüler/innen.
- 9) Die Schüler/innen erhalten Gelegenheit zu selbstständiger Arbeit und werden dabei unterstützt.
- 10) Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Partner- bzw. Gruppenarbeit.
- 11) Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Arbeit im Plenum.
- 12) Die Lernumgebung ist vorbereitet; der Ordnungsrahmen wird eingehalten.
- 13) Die Lehr- und Lernzeit wird intensiv für Unterrichtszwecke genutzt.
- 14) Es herrscht ein positives pädagogisches Klima im Unterricht.
- 15) Wertschätzende Rückmeldungen prägen die Bewertungskultur und den Umgang mit Schülerinnen und Schülern.

Fachliche Grundsätze:

- 16) Im Unterricht werden fehlerhafte Schülerbeiträge produktiv im Sinne einer Förderung des Lernfortschritts der gesamten Lerngruppe aufgenommen.
- 17) Der Unterricht ermutigt die Lernenden dazu, auch fachlich unvollständige Gedanken zu äußern und zur Diskussion zu stellen.
- 18) Die Bereitschaft zu problemlösenden Arbeiten wird durch Ermutigungen und Tipps gefördert und unterstützt.
- 19) Die Einstiege in neue Themen erfolgen grundsätzlich mithilfe sinnstiftender Kontexte, die an das Vorwissen der Lernenden anknüpfen und deren Bearbeitung sie in die dahinter stehende Mathematik führt.
- 20) Es wird genügend Zeit eingeplant, in der sich die Lernenden neues Wissen aktiv konstruieren und in der sie angemessene Grundvorstellungen zu neuen Begriffen entwickeln können.

- 21) Durch regelmäßiges wiederholendes Üben werden grundlegende Fertigkeiten „wachgehalten“.
- 22) Im Unterricht werden an geeigneter Stelle differenzierende Aufgaben (z. B. „Blütenaufgaben“) eingesetzt.
- 23) Die Lernenden werden zu regelmäßiger, sorgfältiger und vollständiger Dokumentation der von ihnen bearbeiteten Aufgaben angehalten.
- 24) Parallel zum Haus- bzw. Übungsheft wird in allen Kursen ein Portfolio als „Wissensspeicher“ geführt, in dem fachliche Inhalte und Erkenntnisse bezüglich der Prozesse in systematischer Form gesichert werden.
- 25) Im Unterricht wird auf einen angemessenen Umgang mit fachsprachlichen Elementen geachtet.
- 26) Digitale Medien werden regelmäßig dort eingesetzt, wo sie dem Lernfortschritt dienen.

2.3 Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung

1. APO-GOSt §13: Grundsätze der Leistungsbewertung

Im Kurssystem der Jahrgangsstufen EF, Q1 bzw. Q2 ergibt sich die jeweilige Kursabschlussnote in einem Kurs mit schriftlichen Arbeiten aus den Leistungen im Beurteilungsbereich „Klausuren“ (§14) und dem Beurteilungsbereich „Sonstige Mitarbeit“ (§15). Die Kursabschlussnote wird gleichwertig aus den Endnoten beider Beurteilungsbereiche gebildet. Eine rein rechnerische Bildung der Kursabschlussnote ist unzulässig.

2. Beurteilung von Klausuren

Die Anforderungsbereiche „Wiedergabe von Kenntnisse (ca. 30%), Anwendung von Erlerntem (ca. 60%) und Transfer (ca. 10%)“ sollen angemessen vertreten sein.

Klausuren werden in der Regel nach folgendem Punkteraster bewertet:

95% ergibt die Note 1+ (15 Punkte)

90% ergibt die Note 1 (14 Punkte)

85% ergibt die Note 1- (13 Punkte)

80% ergibt die Note 2+ (12 Punkte)

75% ergibt die Note 2 (11 Punkte)

70% ergibt die Note 2- (10 Punkte)

65% ergibt die Note 3+ (9 Punkte)

60% ergibt die Note 3 (8 Punkte)

55% ergibt die Note 3- (7 Punkte)

50% ergibt die Note 4+ (6 Punkte)

45% ergibt die Note 4 (5 Punkte)

40% ergibt die Note 4- (4 Punkte)

33% ergibt die Note 5+ (3 Punkte)

27% ergibt die Note 5 (2 Punkte)

20% ergibt die Note 5- (1 Punkt)

<20% ergibt die Note 6 (0 Punkte)

Gehäufte Verstöße gegen Form und Darstellung können zu einer Absenkung um bis zu zwei Notenpunkten führen.

Überprüfung der schriftlichen Leistung

- **Einführungsphase:** Zwei Klausuren je Halbjahr, davon eine (die vierte Klausur in der Einführungsphase) als landeseinheitlich zentral gestellte Klausur. Dauer der Klausuren: 2 Unterrichtsstunden. (Vgl. APO-GOST B § 14 (1) und VV 14.1.)
- **Grundkurse Q-Phase Q 1.1 – Q 2.1:** Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 2 Unterrichtsstunden. (Vgl. APO-GOST B § 14 (2) und VV 14.12)
- **Grundkurse Q-Phase Q 2.1:** Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 3 Unterrichtsstunden. (Vgl. APO-GOST B § 14 (2) und VV 14.12)
- **Grundkurse Q-Phase Q 2.2:** Eine Klausur unter Abiturbedingungen für Schülerinnen und Schüler, die Mathematik als 3. Abiturfach gewählt haben. Dauer der Klausur: 3 Zeitstunden. (Vgl. APO-GOST B § 14 (2) und VV 14.2.)
- **Leistungskurse Q-Phase Q 1.1 – Q 1.2:** Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 3 Unterrichtsstunden. (Vgl. APO-GOST B § 14 (2) und VV 14.2.)
- **Leistungskurse Q-Phase Q 2.1:** Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 3 Unterrichtsstunden. (Vgl. APO-GOST B § 14 (2) und VV 14.2.)
- **Leistungskurse Q-Phase Q 2.2:** Eine Klausur unter Abiturbedingungen (die Fachkonferenz hat beschlossen, die letzte Klausur vor den Abiturklausuren unter Abiturbedingungen bzgl. Dauer und inhaltlicher Gestaltung zu stellen). Dauer der Klausur: 4,25 Zeitstunden. (Vgl. APO-GOST B § 14 (2) und VV 14.2.)
- **Facharbeit:** Gemäß Beschluss der Lehrerkonferenz wird die erste Klausur Q1.2 für diejenigen Schülerinnen und Schüler, die eine Facharbeit im Fach Mathematik schreiben, durch diese ersetzt. (Vgl. APO-GOST B § 14 (3) und VV 14.3.)

Überprüfung der sonstigen Leistung

3. Beurteilung der „Sonstigen Mitarbeit“

- a) Hausaufgabe (Regelmäßigkeit, Vollständigkeit, Sauberkeit)
- b) Individuelle Beteiligung am Unterrichtsgespräch (Regelmäßigkeit, Qualität, Bedeutung der Beiträge für den Fortschritt des Unterrichts)
- c) Einbringen in Gruppenprozesse (Anteil an Gruppenleistung, Hilfsbereitschaft für andere, Rolle in der Gruppe, Übernahme an Verantwortung für Gruppe)
- d) Einzelleistungen (z. B. Referate: Anspruchsniveau, Art der Präsentation, Methodeneinsatz usw.)

2.4 Lehr- und Lernmittel

Lehrbücher:

Abitur 2016:

Q1/Q2: Lambacher Schweizer Mathematik Qualifikationsphase Leistungskurs/Grundkurs, Ernst Klett Verlag, 2011

Abitur 2017:

EF: Bigalke/Köhler: Mathematik, Gymnasiale Oberstufe, Nordrhein-Westfalen, Einführungsphase, ISBN 978-3-06-041912-8

Q1:

GK: Bigalke/Köhler: Mathematik, Gymnasiale Oberstufe, Nordrhein-Westfalen, Qualifikationsphase, Grundkurs, ISBN 978-3-06-041913-5

LK: Bigalke/Köhler: Mathematik, Gymnasiale Oberstufe, Nordrhein-Westfalen, Qualifikationsphase, Leistungskurs, ISBN 978-3-06-041914-2

Hinweis: In der Oberstufe werden die Mathematikbücher vom Eigenanteil der Eltern angeschafft.

GTR: TI NSPIRE (wird von den Eltern/Schüler_innen angeschafft; eine Befreiung von den Kosten ist möglich)

Ergänzendes Material:

Alle Stufen: Arbeitsblättersammlung

EF: Material von Herr Weis zur Wiederholung des Stoffes aus der Sek I mit Selbstdiagnose

3 Entscheidungen zu fach- und unterrichtsübergreifenden Fragen

Wettbewerbe

Die Teilnahme an den Wettbewerben Känguru und Mathematik-Olympiaden wird den Schülerinnen und Schülern in Absprache mit der Fachlehrer_innen ermöglicht.

Projekttag

Das Thema Projekttag wird in den nächsten Sitzungen der Fachkonferenz thematisiert.

Vorbereitung auf die Erstellung der Facharbeit

Spätestens im ersten Halbjahr der Qualifikationsphase werden im Unterricht an geeigneten Stellen Hinweise zur Erstellung von Facharbeiten gegeben. Das betrifft u. a. Themenvorschläge, Hinweise zu den Anforderungen und zur Bewertung.

Exkursionen

Das Thema Exkursionen wird in den nächsten Sitzungen der Fachkonferenz thematisiert.

4 Qualitätssicherung und Evaluation

Durch (geplante) parallele Klausuren (vgl. 2.3) in den Grundkursen, durch Diskussion der Aufgabenstellung von Klausuren in Fachdienstbesprechungen und eine regelmäßige Erörterung der Ergebnisse von Leistungsüberprüfungen wird ein hohes Maß an fachlicher Qualitätssicherung erreicht.

Das schulinterne Curriculum (siehe 2.1) ist zunächst bis 2017 für den ersten Durchgang durch die gymnasiale Oberstufe nach Erlass des Kernlehrplanes verbindlich. Jeweils vor Beginn eines neuen Schuljahres, d.h. erstmalig nach Ende der Einführungsphase im Sommer 2015 werden in einer Sitzung der Fachkonferenz für die nachfolgenden Jahrgänge zwingend erforderlich erscheinende Veränderungen diskutiert und ggf. beschlossen, um erkannten ungünstigen Entscheidungen schnellstmöglich entgegenwirken zu können.

Nach Abschluss des Abiturs 2017 wird eine Arbeitsgruppe aus den zu diesem Zeitpunkt in der gymnasialen Oberstufe unterrichtenden Lehrkräften auf der Grundlage ihrer Unterrichtserfahrungen eine Gesamtsicht des schulinternen Curriculums vornehmen und eine Beschlussvorlage für die erste Fachkonferenz des folgenden Schuljahres erstellen.